

КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА 25.11.2025. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ. РЕШЕНИЯ

1. Решите систему уравнений в вещественных числах:
$$\begin{cases} x + y = z, \\ x^2 + y^2 = 4z, \\ x^3 + y^3 = 18z. \end{cases}$$

Ответ: $(0, 0, 0)$, $(3 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 6)$, $(3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 6)$. **Решение.** При $z = 0$ имеем $x^2 + y^2 = 0$ и, следовательно, $x = y = 0$. Если же $z \neq 0$, делением третьего уравнения на первое получаем $x^2 - xy + y^2 = 18$, откуда $xy = 4z - 18$, а вычитанием второго уравнения из квадрата первого получаем $2xy = z^2 - 4z$. Поэтому $z^2 - 12z + 36 = 0$, откуда $z = 6$. Теперь из условий $x + y = 6$, $xy = 4z - 18 = 6$ находим, что $(x - y)^2 = 6^2 - 24 = 12$, то есть $|x - y| = 2\sqrt{3}$, и числа x и y равны $3 + \sqrt{3}$ и $3 - \sqrt{3}$ в некотором порядке. Легко убедиться, что найденные решения удовлетворяют условию.

2. На клетчатой доске 28×28 все 28 клеток диагонали, идущей из левого верхнего угла доски в правый нижний, покрашены в чёрный цвет. Хромая ладья за один ход переходит из клетки в соседнюю с ней по стороне. Хромая ладья обошла все клетки доски, побывав в каждой ровно один раз (в частности, она не возвращалась в начальную клетку). Докажите, что в какой-то момент ладья сошла с чёрной клетки, а следующим ходом пришла на чёрную.

Решение. Предположим противное. Отметим клетки, на которых была ладья до и после клетки на синей диагонали. Для каждой клетки этой диагонали, кроме может быть тех, на которых ладья начала и закончила свой путь, это две клетки. Итого, мы отметим не менее $2 \cdot 26 + 2 = 54$ клеток. По нашему предположению все эти клетки различные. С другой стороны, клеток, соседних с клетками синей диагонали, в точности 54. Значит, мы отметили их все, притом ладья должна была начать и закончить свой путь на синей диагонали.

Дополним теперь нашу раскраску до шахматной. Осталось заметить, что в начальный и конечный момент времени ладья должна быть на клетках разного цвета, т.к. всего сделала $28^2 - 1$ ходов, т.е. нечётное количество, а каждый ход она меняла цвет клетки на которой стояла. Полученное противоречие завершает доказательство.

3. Пусть $p_i - i$ -е по счету простое число. Для каждого натурального k обозначим через a_k количество натуральных t , для которых k делится на $p_t p_{t+1}$. Докажите, что для любого натурального n

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < \frac{n}{3}.$$

Решение. Каждое a_i — количество пар подряд идущих простых, на произведение которых делится i . Посчитаем, сколько раз мы учли во всей сумме пару $p_i p_{i+1}$. Это количество чисел, не превосходящих n , кратных этому произведению, их не больше $\left\lfloor \frac{n}{p_i p_{i+1}} \right\rfloor$. Следовательно,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \left\lfloor \frac{n}{p_1 p_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p_2 p_3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p_3 p_4} \right\rfloor + \dots$$

(С некоторого места все слагаемые равны нулю). Из этой суммы выделим первое слагаемое, равное $\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor$. Заметим, что остальное не превосходит $\sum_{k \geq 2} \left\lfloor \frac{n}{(2k-1)(2k+1)} \right\rfloor$. Оставим только ненулевые слагаемые (пусть в них k принимает значения от 2 до N), в них уберём округление вниз. Полученная сумма, в свою очередь, телескопически сворачивается:

$$\sum_{k \geq 2}^N \frac{n}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k \geq 2}^N \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2k-1} - \frac{n}{2k+1} \right) < \frac{n}{6}$$

В итоге получили, $\sum a_i < \frac{n}{6} + \frac{n}{6} = \frac{n}{3}$.

4. Прямая ℓ касается описанной окружности ABC в точке B . Точка K выбирается внутри ABC . Прямые, проходящие через точку K параллельно BC и BA , пересекают ℓ в точках X и Y соответственно, причем $BX = BY$. Докажите, что описанные окружности треугольников ABY и CBX пересекаются вторично на прямой BK .

Решение. Пусть X' — вторая точка пересечения KX с (CBX) , Y' — вторая точка пересечения KY с (BYA) . $XBAX'$ — вписанная трапеция, следовательно равнобедренная трапеция. Значит $AY' = BY$ и $\angle Y'AB = \angle YBA = 180^\circ - \angle BCA$, так как ℓ — касательная к описанной окружности. Тогда $\angle CA Y' = \angle Y'AB - \angle CAB = 180^\circ - \angle BCA - \angle CAB = \angle ABC$. Аналогично $CX' = CX$ и $\angle X'CA = \angle ABC$. По условию, $BX = BY$, следовательно, $CX' = AY'$ и $\angle X'CA = \angle CA Y'$, из чего следует, что $X'CA Y'$ — равнобокая трапеция, $X'Y' \parallel AB$. Следовательно $\angle KY'X' = \angle BAC = \angle YBC = \angle YXK$, то есть $XX'Y'Y$ — вписанный четырехугольник. Следовательно, $\text{pow}_K(BXA) = KX \cdot KX' = KY \cdot KY' = \text{pow}_K(BYC)$, следовательно K лежит на радикальной оси наших окружностей, что равносильно требуемому.

5. Положительные числа a, b, c, d, e таковы, что $a + b + c + d + e = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$. Докажите, что

$$a + b + c + d + e \geq \sqrt{\frac{ab+1}{2}} + \sqrt{\frac{bc+1}{2}} + \sqrt{\frac{cd+1}{2}} + \sqrt{\frac{de+1}{2}} + \sqrt{\frac{ea+1}{2}}.$$

Решение. По неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом имеем $\frac{a+\frac{1}{b}}{2} + b \geq 2\sqrt{\frac{ab+1}{2}}$. Сложим пять таких неравенств, получающихся друг из друга циклическим сдвигом переменных. Получим, что

$$\frac{3}{2}(a + b + c + d + e) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} \right) \geq 2 \left(\sqrt{\frac{ab+1}{2}} + \sqrt{\frac{bc+1}{2}} + \sqrt{\frac{cd+1}{2}} + \sqrt{\frac{de+1}{2}} + \sqrt{\frac{ea+1}{2}} \right)$$

Откуда очевидно следует требуемое.

6. Назовём нечётноцветиком в графе G простой нечётный цикл, для любого ребра e которого верно, что существует другой простой нечётный цикл имеющий с нечётноцветиком общее ребро e и более никаких общих вершин. Докажите, что если в графе нет нечётноцветика, то его вершины можно правильным образом раскрасить в 4 цвета.

Решение. Очевидно, что достаточно решать задачу для связных графов. Пусть в связном графе G нет нечётноцветника. Подвесим G за любую его вершину — вершину A , граф разобьётся на слои (вершины на расстоянии 1 от A , на расстоянии 2 и т.д.). Если каждый слой сам по себе является графом без нечётных циклов, то граф G красится в 4 цвета следующим образом: нечётные слои красятся в цвета 1, 2, чётные — в цвета 3, 4. Пусть в каком-то слое M присутствует нечётный цикл. Тогда утверждается, что любой такой цикл является нечётноцветником. Действительно, для любого ребра AB из M существует нечётный цикл, пересекающийся с M только по этому ребру, — для его построения нужно начать синхронно подниматься из вершин A и B по слоям, пока их предки не совпадут.

7. Существуют ли различные нецелые вещественные числа $a > 1$, $b > 1$, для которых произведение $\lceil a^n \rceil \cdot \lceil b^n \rceil$ является квадратом при всех натуральных n ? Здесь $\lceil x \rceil$ обозначает наименьшее целое число, не меньшее x .

Ответ: Да, существуют. **Решение.** Положим $a = 3 + \sqrt{8}$, $b = 4a = 12 + 4\sqrt{8}$ и рассмотрим сопряжённые квадратичные иррациональности $\bar{a} = 3 - \sqrt{8}$, $\bar{b} = 4\bar{a} = 12 - 4\sqrt{8}$. Очевидно, $a^n + \bar{a}^n$ и $b^n + \bar{b}^n = 4^n(a^n + \bar{a}^n)$ — натуральные числа. Поскольку $0 < \bar{a}, \bar{b} < 1$, имеем $\lceil a^n \rceil = a^n + \bar{a}^n$ и $\lceil b^n \rceil = b^n + \bar{b}^n$. При этом $\lceil a^n \rceil \cdot \lceil b^n \rceil = 4^n(\lceil a^n \rceil)^2$ — точный квадрат при всех натуральных n .

8. Дан описанный выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E , а прямые AD и BC в точке F . Внешние биссектрисы углов A и C и прямая EF образуют треугольник Δ_1 . Внешние биссектрисы углов B и D и прямая EF образуют треугольник Δ_2 . Докажите, что описанные окружности треугольников Δ_1, Δ_2 касаются.

Решение. Не умаляя общности, лучи AD и BC пересекаются в точке E , лучи AB и CD в точке F . Пусть $PQRS$ — четырёхугольник, образованный внешними биссектрисами четырёхугольника $ABCD$ (P на внешних биссектрисах углов A и B и далее по циклу). Обозначим $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ и 2δ — углы четырёхугольника $ABCD$. Тогда заметим, что $PQRS$ — вписанный четырёхугольник: $\angle PSR = 180^\circ - \angle SAD - \angle SDA = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \delta) = \alpha + \delta$ аналогично $\angle PQR = \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha - \delta$. Пусть X — точка пересечения PQ и RS , и Y — точка пересечения PS и QR . Рассмотрим точку M — точку Микеля четырёхугольника $PQRS$. Воспользуемся следующим фактом: во вписанном четырёхугольнике точка Микеля лежит на одной прямой с точками пересечения противоположных сторон. То есть точка M лежит на прямой XY . Покажем, что это и есть точка касания описанных окружностей треугольников Δ_1 и Δ_2 .

Покажем, что M лежит на описанной окружности треугольника Δ_2 . Пусть K и L — точки пересечения внешних биссектрис B и D с EF соответственно. В силу того, что M — точка Микеля, существует ПГ (поворотная гомотетия) с центром в M , которая переводит PQ в SR . Лежание M на искомой окружности равносильно тому, что при этой ПГ K переходит в L (потому что тогда M будет точкой Микеля $PKLS$, а значит лежит на описанной окружности KLY). Пусть I — центр вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$, тогда E, S, I, Q лежат на одной прямой — биссектрисе угла $\angle BIC$, и аналогично P, I, R, F лежат на одной прямой. Из вписанности, треугольники PIQ и SIR подобны, B и D в них — основания высот, т.е. соответствующие элементы. Следовательно, для того чтобы доказать, что K при ПГ переходит в L , достаточно доказать, что $\frac{BK}{DL} = \frac{BI}{DI}$.

Заметим, что BK и DL — биссектрисы в треугольниках с одинаковым периметром и общей стороной — BEF и BDF , значит $\frac{BK}{DL} = \sqrt{\frac{BF \cdot BE}{DF \cdot DE}}$ (тут мы воспользовались формулой длины биссектрисы $\ell_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$). При этом BI и DI относятся как синусы половин углов $\angle ADC$ и $\angle ABC$. Теперь у нас осталось утверждение чисто про описанный четырёхугольник: при условиях выше $\sqrt{\frac{BF \cdot BE}{DF \cdot DE}} = \frac{\sin(\delta)}{\sin(\beta)}$. Так как I — центр вписанной окружности и треугольника EAB , и треугольника DAF с общим углом A , значит углы $\angle DIE = \angle FIB = x$. Напишем четыре теоремы синусов: $BE = \frac{EI}{\sin(\beta)} \sin(90^\circ + \alpha)$; $DF = \frac{FI}{\sin(\delta)} \sin(90^\circ + \alpha)$; $BF = \frac{FI}{\sin(\beta)} \sin(x)$; $DE = \frac{EI}{\sin(\delta)} \sin(x)$. Подставив, получим искомое равенство.

Доказательство того, что M лежит на Δ_1 немного отличается, так как биссектрисы углов A и C будут внешними в треугольниках AEF и CEF . Из описанности $ABCD$ видим, что $FA - AE = FC - CE$. Выразим биссектрисы по формуле для внешней биссектрисы $\ell_c = \frac{\sqrt{ab(a+c-b)(b+c-a)}}{b-a}$. Теперь, если мы повторим доказательство первого случая, видно, что после подстановки длин в формулу у нас останется выражение, аналогичное первому случаю.

Теперь мы знаем, что M — точка пересечения наших окружностей, покажем, что это точка касания. Пусть PS и QR пересекают EF в точках T и N соответственно. Тогда касание окружностей равносильно равенству $\angle LMT = \angle LXM + \angle TYM$. $\angle LXM + \angle TYM = 180^\circ - \angle XST = \angle XQY$. $\angle LMT = 180^\circ - \angle LMX - \angle TMY = 180^\circ - \angle LKQ - \angle TNQ = \angle XQY$, что завершает доказательство.